BREVE TRATTATINO

DELLA MISURA DELLE VOLTE

COMPOSTO

DAL FU' NICCOLÒ

DI MARTINO

Reggio Precettore, e Maestro di Mattematica

DI

FERDINANDO IV. NOSTRO AUGUSTISSIMO REGNANTE

Dato alla Luce da suo Nipote

GIUSEPPE DI MARTINO

Ingegnere Estraordinario, e Tenente Agregato

DEDICATO

A. S. E.

D. FRANCESCO PIGNATELLI

DE' PRINCIPI STRONGOLI

Marefciallo di Campo Ajutante Reale, Colonello Governatore del Real Battaglione, e Gentiluomo di Camera, di Entrata coll' Esercizio di S. M.



NAPOLI MDCCLXXX.

PRESSO GIO: BATTISTA SETTEMBRE

Con Regal permesso.

DELLA MISURA DELLE VOLTE

1. QUantunque nella Geometria Pratica siasi trattato della Misura delle Volte; Nientedimeno siccome ivi si considerarono soltanto le Volte principali, così le medesime furono poste a calcolo nella supposizione di essere formate con quadranti Circolari, le quali perciò diconsi di giusto sesto. Intanto le stesse volte sogliono formarsi altresì con quadranti Ellittici; Onde si è, che talune si dicono essere di sesto maggiore, ed altre di sesto minore. E poicchè la Misura di quest' altre volte dipende da principj molto diversi, perciò faremo ora vedere, come possono misurarsi le volte di quest' altra indole.

§. I.

Della Misura dell' Ellisse.

2. COnforme si ha presso a poco la circonferenza di un cerchio, con prendere il triplo del suo diametro, e con aggiungervi la settima parte; così si avrà al di presso il Perimetro di qualsisia Ellisse, con prendere il duplo dell' asse maggiore, e con aggiungervi l' altro minore insieme colla sua settima parte.

3. Se adunque l' asse maggiore sia di 10 palmi, e l' altro di 8, sarà il Perimetro dell' Ellisse di palmi

29

29 $\frac{1}{7}$, e cosi ancora ſe l' aſſe maggiore ſia di 12 palmi, e l' altro minore di 10, il Perimetro dell' Elliſſe ſarà di palmi 35 $\frac{3}{7}$.

4. Quindi niente ſarà più facile, quanto di determinare il diametro di un cerchio, la di cui circonferenza ſia eguale preſſo a poco al Perimetro di una data Elliſſe. Prendanſi perció, così li $\frac{7}{11}$ dell' aſſe maggiore, come li $\frac{4}{11}$ dell' altro minore, e colla loro ſomma ſi avrà il diametro ricercato

5. Così li $\frac{7}{11}$ di 10 ſono 6 $\frac{4}{11}$, e li $\frac{4}{11}$ di 8 ſono 2 $\frac{10}{11}$ li quali inſieme ci danno 9 $\frac{3}{11}$; Onde di tanti palmi dovrà eſsere il diametro del cerchio, la di cui circonferenza uguaglia preſſo a poco il Perimetro dell' Elliſſe, in cui l' aſſe maggiore è di 10 palmi, e l'altro minore di 8.

6. Similmente li $\frac{7}{11}$ di 12 ſono 7 $\frac{7}{11}$, e li $\frac{4}{11}$ di 10 ſono $\frac{34}{11}$, li quali inſieme ci danno 11 $\frac{3}{11}$. Onde di tanti palmi dovrà eſſere il diametro del Cerchio, la di cui circonferenza ſi fa eguale preſſo a poco al perimetro dell' Elliſſe, in cui l' aſſe maggiore è di 12 palmi, e l' altro minore di 10.

7. Conforme poi sì ha la capacità d' un cerchio, conprendere li $\frac{11}{14}$ del quadrato fatto dal ſuo diametro, così s' avrà la capacità d' un Elliſſe, con moltiplicare trà di loro li due aſſi, e con prendere li $\frac{11}{14}$ del prodotto nato da queſta moltiplicazione.

8. Se adunque d' un Elliſſe l' aſſe maggiore ſia di 10 palmi, e l' altro minore di 8, ſarà 80 il prodotto di queſti due aſſi. Onde perchè li $\frac{11}{14}$ d' un tal prodotto ſono 62 $\frac{6}{7}$, ſarà la capacità dell' Elliſſe propoſta di 62 $\frac{6}{7}$ palmi quadrati.

9. Simllmente ſe l' aſſe maggiore dell' *E*lliſſe ſia di 12 palmi, e l' altro minore di 10, ſarà 120 il prodotto dei due aſſi; Onde ſiccome li $\frac{11}{14}$ di queſto prodotto ſono 94 $\frac{2}{7}$, così la capacità di queſt' altra Elliſſe ſarà di 94 $\frac{2}{7}$ palmi quadrati.

10. La capacità di un cerchio ſi hà parimente con moltiplicare la ſua circonferenza per la quarta parte del ſuo diametro. Ma volendoſi avere in una maniera conſimile la capacità di un Elliſſe, dovrà moltiplicarſi la circonferenza del cerchio, che hà per ſuo dia-

diametro uno dei due assi, per la quarta parte dell' altro asse.

11. Così se di un Ellisse l' asse maggiore sia 10 palmi, ed il minore di 8; saranno 31 $\frac{3}{7}$, e 25 $\frac{1}{7}$ le circonferenze de' cerchi, che anno quest' assi per loro diametri; Onde con moltiplicare, così la prima di esse per la quarta parte dell' asse maggiore, si ritroverà come sopra, che la capacità dell' Ellisse sia di 62 $\frac{6}{7}$ palmi quadrati.

12. E così parimente se di un Ellisse l' asse maggiore sia di 12 palmi, e l' altro minore di 10; saranno 36 $\frac{5}{7}$, e 31 $\frac{3}{7}$ le circonferenze de' cerchi, che anno quest' assi per loro diametri. Onde con moltiplicare tanto la prima per la quarta parte dell' asse minore, quanto la seconda per la quarta parte dell' asse maggiore ritroveremo come sopra, che la capacità dell' Ellisse sia di 94 $\frac{2}{7}$ palmi quadrati.

13. Volendosi un cerchio, la di cui capacità sia eguale a quella di una data Ellisse; Chiaro si è, che debba egli avere per suo diametro la mezza proporzionale, che cade trà i due assi.

14. In fatti siccome con prendere $\frac{11}{14}$ del quadrato fatto da questa mezza proporzionale si hà la capacità del cerchio; così essendo il riferito quadrato eguale al prodotto dei due assi, si verranno propriamente a prendere $\frac{11}{14}$ di questo prodotto, coi quali si hà la capacità dell' *Ellisse*.

15. Da ció intanto possiamo dedurre due conseguenze, la prima si è che se le tre rette siano continuamente proporzionali, il cerchio, che ha per diamemetro quella di mezzo, debba essere eguale al prodotto della circonferenza che ha per diametro una delle due estreme, per la quarta parte dell' altra estrema.

16. L' altra conseguenza si è, che se sopra i due assi d' un Elisse, come diametri, descrivansi due cerchi, de' quali in conseguenza uno sarà circoscritto intorno all' Elisse, e l' altro iscritto dentro di esso; Lo spazio Ellittico debba essere mezzo proporzionale tra i due riferiti cerchi.

§. II.

§. II.

Della misura del Cilindro Ellittico.

17. IL Cilindro può elevarsi, non solo sul cerchio; Ma eziandio sull' Ellisse. Onde siccome il primo, che hà per base il cerchio dee dirsi Cilindro circolare; così l' altro, che hà per base l' Ellisse, potrà chiamarsi Cilindro Ellittico.

18. Se adunque nel Perimetro dell' Ellisse prendasi un punto ad arbitrio, da cui elevasi sul piano della stessa Elisse una retta, che si porti per quel Perimetro in modo, che resti sempre parallela a se stessa; avremo il Cilindro Ellittico.

19. In fatti siccome l' alro termine superiore della retta descrive un' altra Elisse simile, eguale, e parallela alla prima, così la retta medesima descriverà intorno a queste due Ellissi una superficie curva, per cui si terminerà lateralmente il Cilindro Ellittico.

20. La retta poi, che congiunge i centri delle due Ellissi, sarà l' asse del Cilindro Ellittico. E conforme egli si fa parallelo alla retta, che descrive la superficie laterale del Cilindro; così potendo il medesimo insistere sul piano di ciascuna delle due Elissi, tanto ad angoli retti, quanto ad angoli obliqui; Quindi si è, che ancora il Cilindro Ellittico puol essere non solo retto, ma eziandio obliquo, ovvero scaleno.

21. Per la misura intanto delle volte a noi basterà considerare il solo Cilindro Ellittico retto. Onde da quì innanzi nominandosi semplicemente Cilindro Ellittico, sempre dovrà intendersi quello, in cui l' asse insiste ad angoli retti sul piano della sua base.

22. Volendosi di questo Cilindro la superficie curva, per cui lateralmente egli si termina, non dovrà farsi altra cosa, se non che moltiplicare il Perimetro della sua base per l' asse dello stesso Cilindro; Poicchè col prodotto nato da questa moltiplicazione si avrà la superficie ricercata.

23. Così se dell' Ellisse, che serve di base al Cilindro l' asse maggiore sia di 10 palmi, e l' altro minore di 8, sarà il suo Perimetro di palmi 29 $\frac{1}{7}$. Onde supposto. che l' asse dello stesso Cilindro sia di 20 palmi, si ritroverà essere la sua superficie curva di 582 $\frac{6}{7}$ palmi quadrati.

24. *E* così parimente se dell' Ellisse, che serve di base al Cilindro Elittico, l' asse maggiore sia di 12 palmi, e l' altro minore di 10; sarà il suo Perimetro di palmi 35. $\frac{3}{7}$. Onde se l'asse dello stesso Cilindro sia di 25 palmi, si ritroverà essere la sua superficie curva di 885 $\frac{5}{7}$ palmi quadrati.

25. Volendosi poi la solidità del Cilindro Ellittico, dovrà moltiplicarsi la sua base per l' asse dello stesso Cilindro; Poicchè col prodotto nato da questa moltiplicazione si avrà la solidita ricercata del Cilindro.

26. Così se dell' Ellisse, sù di cui sta elevato il Cilindro Ellittico, l'asse maggiore sia di 10 palmi, e l' altro minore di 8, si ritroverà essere la sua capacità di 62 $\frac{6}{7}$ palmi quadrati. Onde supposto, che l' asse dello stesso Cilindro sia di 20 palmi, sarà la sua solidità di 1257 $\frac{1}{7}$ palmi cubici.

27. E così parimente se dell' *E*llisse, sù di cui stà elevato il Cilindro Ellittico, l' asse maggiore sia di 12 palmi, e l' altro minore di 10, si ritroverà essere la sua capacità di 94 $\frac{2}{7}$ palmi quadrati. Onde supposto, che l' asse dello stesso Cilindro sia di 25 palmi sarà la sua solidità di 2357 $\frac{1}{7}$ palmi cubici.

28. Avendosi adunque la capacità di un Ellisse con prendere li $\frac{11}{14}$ del prodotto dei due assi; chiaro si è, che si avra la solidità del Cilindro Ellittico, con moltiplicare trà di loro, così i due assi della sua base, come l' asse dello stesso Cilindro, e con prendere gl' $\frac{11}{14}$ di questo prodotto.

§. III.

§. III.

Dell' Unghiette Cilindriche Ellittiche.

29. LE Unghiette Cilindriche possono risecarsi, non solo dal Cilindro circolare, ma eziandio dal Cilindro Ellittico; Onde per distinguerle trà esso loro le prime si diranno essere Unghiette cilindriche circolari, e le seconde Unghiette cilindriche Ellittiche.

30. Se adunque un Cilindro Ellittico seghisi per un piano, che si vada ad incontrare col piano della sua base in una retta qualsisia, la porzione risecata dal Cilindro verso la stessa base, sì dirà essere Unghietta Cilindrica Ellittica.

31. Or siccome la superficie Cilindrica Ellittica non è da per tutto di egual curvatura, così neppure l'Unghiette risecate dal Cilindro Ellittico sono tutte della stessa indole. Conforme in effetto alcune di esse sono di forma regolare, ed altre al contrario di forma irregolare.

32. Quantevolte il Cilindro Ellittico segasi in modo, che la comune sezione del piano secante col piano delle base, sia perpendicolare ad uno dei due assi della stessa base, chiaro si è, che l' Unghietta risecata dal Cilindro sia di forma regolare.

33. Al contrario poi se la comune sezione del piano secante col piano della base, s' incontri obliquamente con uno dei due assi della stessa base; in tal caso non si durerà fatica ad intendere, che l'Unghietta risecata dal Cilindro sia di forma irregolare.

34. Per la misura intanto delle Volte basterà considerare quelle sole Unghiette Cilindriche Ellittiche, che oltre di essere regolari, hanno ciò ancora di speciale, che sono risecate da piani, li quali passano per lo centro della base del Cilindro.

35. Quindi siccome la regolarità dell' Unghietta richiede, che la commune sezione del piano secante col piano della base, sia perpendicolare ad uno dei

due

due assi della stessa base; così passando il piano secante per lo centro della medesima base; chiaro si è, che la riferita comune sezione debba confondersi con l'altro asse.

36. Essendo così, vedesi chiaramente, che le Unghiette Cilindriche Ellittiche, di cui abbiamo bisogno per la misura delle Volte, siano risecate da' piani, che s' incontrano colla base del Cilindro Ellittico in uno dei due assi; E perciò queste tali Unghiette possono essere di due specie.

37. In fatti il piano per mezzo di cui risecasi dal Cilindro Ellittico una tale Unghietta, può incontrarsi colla base dello stesso Cilindro, così nel suo asse maggiore, come nell'altro minore; Onde l'Unghietta risecata sarà della prima specie, se l' incontro facciasi nell' asse maggiore, sarà al contrario della seconda, se l' incontro sortisce nell' asse minore.

38. Egli è necessario intanto distinguere tra esso loro queste due specie di Unghiette Ellittiche; Poicchè sebbene la misura della loro solidità sia la medesima, niente dimeno per quanto tocca alla loro superficie curva la misura di esse dee farsi con regole molto diverse.

39. Se sul cerchio, che ha per diametro l'altro asse della base del Cilindro Ellittico descrivasi un Cilindro circolare, da cui per mezzo dello stesso piano risecasi un Unghietta circolare; Chiaro si è, che per rapporto ad essa l'Unghietta Ellittica della prima specie, sia di maggior estensione; ed al contrario l' altra della seconda di estensione minore.

40. Conforme poi ciascuna di queste Unghiette Ellittiche appoggiasi sulla mettà dell' Ellisse, che serve di base al Cilindro, da cui sono state risecate, così non v' ha dubbio, che la medesima debba terminarsi alla mettà di un' altra Ellisse, la quale si ritroverà avere colla prima un' asse comune.

41. Ma egli è chiaro altresì, che l' altro asse di quest' altra Ellisse sia sempre maggiore dell' altro asse della prima. Onde se l' Unghietta sia della prima specie, potrebbe talvolta avvenire, che ella si termini ad un mezzo cerchio: il che non mai può accadere, essendo l' Unghietta della seconda specie.

Fig. 1. 42. Fingiamo ora, che ABA sia la mettà dell' Elisse, sù di cui si appoggia l' Unghietta Ellittica, e che ADA sia la mettà dell' altra Elisse, a cui la stessa Unghietta si termina, dimodochè AA sia il loro asse comune. Se adunque dal comune loro centro C, si tirino ne' loro piani le rette CB, CD, che siano perpendicolari al comune loro asse AA; Chiaro si è, che queste rette siano le metta degl' altri loro assi.

43. Se poi congiungansi i punti B, e D per la retta BD, si ritroverà essere quest' altra retta, nella superficie curva dell'Unghietta. E siccome il triangolo CBD sarà rettangolo in B; così non è egli da porsi in dubbio, che il medesimo triangolo divida l' Unghietta in due parti eguali.

44. Del rimanente conforme nella struttura delle Volte impieganſi propriamente le mettà delle riferite Unghiette Ellittiche; così ancora le sole loro mettà saranno da noi poste a Calcolo; e dovremo far vedere, come possa misurarsi così la loro solidità, come la loro superficie curva.

45. Or essendo ABCD la mettà d' un Unghietta Ellittica, vedesi chiaramente che ella sia terminata da quattro superficie, di cui una è il triangolo CBD rettangolo in B; l' altra è il quadrante Ellittico ACB attinente colla base del Cilindro da cui è stata risecata l' Unghietta; La terza è l' altro quadrante Ellittico ACD, ricavato dallo stesso Cilindro per mezzo del piano secante; E la quarta finalmente è il triangolo Cilindrico ABD.

46. Ma siccome la mezza Unghietta ABCD vedesi elevata nelle volte sul triangolo CBD; così questo stesso triangolo potrà riguardarsi, come sua base. Conforme poi la AC è l'altezza della mezza Unghietta, così potrà aversi la BC come sua larghezza, e la BD come sua lunghezza. Onde l' altezza AC sarà maggiore, o minore della larghezza BC, secondo che la mezza Unghietta è della prima, o della seconda specie.

§. IV.

§. IV.

Della Misura della solidità delle Unghiette Ellittiche.

47. SE la mezza Unghietta ABCD sia risecata da un Cilindro, non già Ellittico, ma circolare; Di già si è dimostrato nella Geometria Pratica, come debba misurarsi la sua solidità, cioè con prendere i due terzi del Prisma circoscritto, ed in conseguenza con moltiplicare la sua base, o sia il triangolo CBD per li due terzi della sua altezza AC.

48. Or essendo la mezza Unghietta ABCD risecata da un Cilindro Ellittico, pure la sua solidità dovrà misurarsi con moltiplicare la sua base CBD per li due terzi della sua altezza AC; Per la ragione, che eziandio quest'altra mezza Unghietta si fa eguale a i due terzi del Prisma circoscritto.

49. Se adunque la larghezza BC della mezza Unghietta sia di 4 palmi, e la sua lunghezza BD di palmi 6.; sarà il triangolo CBD, che serve ad essa di base di 12 palmi quadrati. Onde posto, che l'altezza AC sia di palmi 5, si ritroverà essere la solidità della mezza Unghietta di 40 palmi cubici.

50. Similmente se la larghezza BC della mezza Unghietta sia di 6 palmi, e la lunghezza BD di palmi 8; sarà la sua base, o sia il triangolo CBD di 24 palmi quadrati. Onde posto, che l'altezza AC sia di 4 palmi; sarà la solidità della mezza Unghietta di 64 palmi cubici.

51. Giova intanto quì notare, che siccome per avere il triangolo CBD, che serve di base alla mezza Unghietta dee prendersi la metta del prodotto della larghezza, e della lunghezza moltiplicate insieme; così per avere la solidità della mezza Unghietta non debba farsi altra cosa, se non che moltiplicare insieme le sue tre dimensioni, e prendere la terza parte del prodotto.

52. In fatti se la larghezza BC sia di 4 palmi, la lunghezza BD di palmi 6, e l' altezza AC di palmi 5: sarà 120 il prodotto di tutte tre queste dimensioni; Onde siccome la terza parte di esse è 40, così la solidità della mezza Unghietta sarà eziandio di 40 palmi cubici.

53. E così ancora se la larghezza BC sia di 6 palmi la lunghezza BD di palmi 8, e l'altezza di BC palmi 4, sarà il prodotto di tutte tre queste dimensioni 192. Onde conforme la terza parte di esso è 64, così la solidità della mezza Unghietta sarà parimente di 64 palmi cubici.

54. Nè poi è egli difficile il dimostrare, che la solidità della mezza Unghietta Ellittica, debba misurarsi nelle stessa guisa, con cui si misura la solidità della mezza Unghietta circolare. Perciò sul cerchio, che ha per raggio la AC elevasi un'altro Cilindro circolare, da cui riseghisi per mezzo dello stesso piano ADC la mezza Unghietta circolare AECF. *Fig. 2.*

55. Se adunque possa dimostrarsi, che questa mezza Unghietta circolare AECF sia alla mezza Unghietta Ellittica ABCD, come sono i due triangoli CEF, CBD, che servono ad esse di base; chiaro si è, che conforme la solidita della mezza Unghietta circolare AECF si ha con moltiplicare la sua base per li due terzi dell' altezza AC, così ancora la solidità della mezza Unghietta Ellittica ABCD debba aversi con moltiplicare la sua base CBD per li due terzi della stessa altezza.

56. Per dimostrarlo seghisi l' una, e l' altra mezza Unghietta per un piano parallelo al comune piano delle loro basi, colla di cui sezione facciasi il triangolo MNO nella mezza Unghietta Ellittica, ed il triangolo MPQ nella mezza Unghietta circolare. Per poco adunque, che si voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che siano simili tra di loro i quattro triangoli MNO, MPQ, CBD, CEF Onde siccome le due rette MN, MP sono nella stessa ragione dell' altre due CB, CE; così ancora i due triangoli MNO, MPQ, saranno nella stessa ragione degli altri due CBD, CEF.

57. Intendansi ora le due mezze Unghiette segate per

per infiniti piani, non solo paralleli al comune piano delle loro basi, ma egualmente distanti ancora l'uno dall'altro. E poichè la riferita dimostrazione ha luogo da per tutto, i triangoli della mezza Unghietta circolare, saranno ai triangoli corrispondenti della mezza Unghietta Ellittica, nella stessa ragione in cui sono i due CBD, CEF; e pertanto eziandio le somme degl'uni, e degli altri triangoli saranno in questa stessa ragione, ma secondo il metodo degl' indivisibili le due mezze Unghiette si hanno con queste somme, dunque ancora le due mezze Unghiette saranno nella ragione, in cui sono i due triangoli CBD, CEF.

58. Colla stessa dimostrazione si farà vedere altresì, che ancora le porzioni ANMO, APMQ delle due mezze Unghiette siano tra esso loro nella ragione delle loro basi CBD, CEF. Onde colla medesima regola, con cui si misura la solidità della porzione APMQ risecata dalla mezza Unghietta circolare, potrà misurarsi parimente la solidità dell'altra porzione. ANMO, tagliata dalla mezza Unghietta Ellittica.

59. In fatti per quel tanto è stato avvertito nella Geometria Pratica, misurasi la solidità della porzione APMQ attinente alla mezza Unghietta circolare, primieramente con tagliare dalla AM la sua terza parte, che sia AS, indi con fare, come CE ad, EF, così la metà di CS ad una quarta proporzionale, ed in fine con moltiplicare questa quarta proporzionale per lo quadrato della AM.

60. Or essendo i due triangoli CBD, CEF simili tra di loro, saranno i medesimi come i quadrati dei loro lati Omologi CB, CE, o pure come i quadrati delle due CB, CA. Ma congiunta la AB, che s' incontri colla MN nel punto V, si faranno equiangoli i due triangoli ACB, AMV; ed in conseguenza il quadrato di BC sta al quadrato di AC, come il quadrato di MV al quadrato di AM. Dunque ancora i due triangoli CBD, CEF saranno tra esso loro, come i quadrati delle due MV, AM.

61 Quindi siccome le porzioni ANMO, APMQ delle due mezze Unghiette sono trà di esse, come i due triangoli CBD, CEF; così le stesse porzioni saranno al-

tresì come i quadrati delle due MV , AM ; Onde sì avrà la solidità della porzione ANMO risecata dalla mezza Unghietta Elittica , primieramente con tagliare dalla AM la terza parte , che sia AS ; Indi con fare come CB , a BD , così la metà di CS ad una quarta proporzionale , ed in fine con moltiplicare questa quarta proporzionale per lo quadrato di MV.

62. Per schiarire una tal regola con qualche esempio fingiamo, che CB sia di 8 palmi BD di 24, ed AC di 12. Se adunque la porzione ANMO sia risecata in modo, che AM sia di 6 palmi, sarà AS di 2, e CS di 10. Onde facendo , che CB sia a BD , come la metà di CS ad una quarta proporzionale , si ritroverà essere questa quarta proporzionale di palmi 15.

63. Essendo poscia equiangoli i due triangoli ACB, AMV sarà AC, a CB, come AM ad MV; e pertanto facendosi MV di 4 palmi, sarà il suo quadrato di 16 palmi quadrati. Onde siccome il prodotto di 15 per 16 è 240, così la solidità della porzione ANMO sarà di 240 palmi cubici, ed essendo la solidità dell' intera mezza Unghietta ABCD di 768 palmi cubici, sarà la solidità della rimanante porzione CMNODB di 528 palmi cubici.

§. V.

Della Superficie curva delle Unghiette Ellittiche della prima specie.

Fig. 3. 64. SE l' Unghietta Cilindrica ABCD sia circolare di sua natura, dimostrammo nella Geometria Pratica , che la sua superficie curva sia dupla della sua base CBD , ed inconseguenza, che per misurarla non debba farsi altra cosa, se non che moltiplicare la sua larghezza BC per la sua lunghezza BD. E poichè nell' Unghietta circolare sono eguali trà esso loro l' altezza AC , e la larghezza BC ; Perciò si avrà an-

ancora la ſteſſa ſuperficie curva con moltiplicare l' altezza AC per la lunghezza BD.

65. Tirandoſi poſcia nella ſuperficie curva della ſteſſa Unghietta la retta MO parallela alla BD, potremo in una maniera conſimile miſurare altresì ciaſcuna delle due porzioni nelle quali reſta diviſa per detta retta la riferita ſuperficie. In fatti tirata la MN parallela alla BC, la porzione AMO si avrà con moltiplicare la AN per la BD, e la porzione BMOD con moltiplicare la CN per la BD.

66. Or eſſendo l' Unghietta di ſua natura Ellittica non è egli così facile di miſurare la ſua ſuperficie curva; Imperocchè, ſiccome la determinazione di detta ſuperficie dipende dalla quadratura del cerchio, eſſendo l' Unghietta della prima ſpecie, in cui l' altezza AC è maggiore della larghezza BC, così ſe l' Unghietta ſia della ſeconda ſpecie, in cui al contrariò l' altezza AC è minore della ſua larghezza BC, non potrà determinarſi la ſua ſuperficie curva, ſe non ſe ricorrendo alla quadratura dell' iperbole.

67. Fingiamo perciò primieramente, che ABCD ſia un Unghietta Ellittica della prima ſpecie. E ſuppoſto, che E ſia il foco del quadrante Ellittico ACB, ſi prolunghi la CA talmente perſino al punto F, che CE ſia a CA, come CA a CF; Deſcivaſi poſcia il quadrante circolare FCG, in cui tiriſi la AH parallela alla CG. Ed io dico, che la ſuperficie curva ABD dell' Unghietta ſia allo ſpazio circolare ACGH, come la lunghezza BD della ſteſſa Unghietta al raggio CF del quadrante circolare.

68. Per dimoſtrarlo prendaſi nel Perimetro del quadrante Ellittico l' arco infinitamente picciolo M*m*, e tiriſi così nello ſteſſo quadrante le rette MN, *mn* parallele alla BC, come nella ſuperficie curva dell' Unghietta le rette MO, *mo* parallele alla BD. I due piccioli trapezj adunque OM*mo*, NM*mn* potranno riguardarſi come due piccioli rettangoli, e perciò i medeſimi ſaranno trà di loro in ragion compoſta di MO ad MN, di M*m* ad N*n*.

69. Or ſiccome l' archetto M*m* puó averſi come porzione della retta MT, che tocca il Perimetro del

quadrante Ellittico; così la MS sia perpendicolare di questa tangente sarà Mm ad Nn, come MS ad MN. Ma per essere equiangoli i due triangoli NMO, CBD, MO, stà ad MN, come BD a BC. Dunque i due piccioli trapezj OMmo, NMmn saranno trà di loro in ragion composta di BD a BC, e di MS ad MN.

70. Prolunganfi poscia le due MN, mn persino a che s' incontrino col Perimetro del quadrante circolare nè punti R, ed r. E poicchè ancora i due piccioli trapezj NMmn, RNnr possono riguardarsi, come due piccioli rettangoli dotati d' una stessa altezza; perciò i medesimi saranno trà di loro nella semplice ragione delle loro basi MN, NR, o pure in ragion composta di BC a BD, e di MN ad NR. Onde ordinando il picciolo trapezio OM mo sarà al picciolo trapezio RN nr in ragion composta di BD a BC, e di MS ad NR.

71. Conforme poi il quadrato di MS è eguale al rettangolo TSN; così attente le proprietà della tangente MT sì ritroverà, che questo rettangolo sia al quadrato di NR, come il quadrato di BC al quadrato di CF. Onde essendo MS ad NR, come BC a CF, saranno i due piccioli trapezj OMmo, RNnr in ragion composta di BD a BC, e di BC, CF o pure nella semplice ragione di BD a CF.

72 Questa dimostrazione intanto ha luogo ovunque prendansi i due piccioli trapezj OMmo, RNnr. Onde componendo ancora l' intera superficie curva ABD dell' Unghietta sarà all' intero spazio circolare ACGH, come BD a CF. Ed in virtù della stessa dimostrazione dovrà essere altresì nella ragion di BD a CF, così la porzione della superficie AMO alla porzione dello spazio circolare ANRH, come l' altra porzione della superficie BDOM all' altra porzione dello spazio circolare CNRG.

73. Del rimanente di questo stesso egli è facile il ricavarne, che se l' Unghietta sia circolare di sua natura la sua superficie curva ABD debba essere eguale al rettangolo di AC in BD. In fatti essendo ACB quadrante circolare, confome per riunirsi il foco E col centro C, si fa la CE infinitamente picciola, e la

la CF di lunghezza infinita, così l' arco circolare GH diventerà una retta eguale e parallela alla AC. Onde facendosi lo spazio circolare ACGH eguale al rettangolo di AC in CF, sarà la superficie curva ABD dell' Unghietta eguale al rettangolo di AC in BD.

§. VI.

Del modo di misurare la superficie curva delle riferite Unghiette Ellittiche.

74. PEr intendere ora, come per mezzo del Teorema dimostrato possa misurarsi la superficie curva ABD della riferita Unghietta Ellittica, giova prima notare, che se congiunganfi le due CH, FB si fanno uguali tra di loro i due triangoli CAH, CBF. In effetto essendo il foco E del quadrante Ellittico ACB, saranno eguali le due BE, CA. Onde essendo continuamente proporzionali le tre CE, CA, CF, sarà altresì, come il quadrato di CE al quadrato di BE, così il quadrato di CA al quadrato di CF, ovvero CH; E pertanto togliendo gl' antecedenti dai conseguenti, sarà parimente, come il quadrato di AH al quadrato di CH, o sia CF. Quindi essendo BC a CA, come AH a CF i due triangoli CAH, BCF avranno intorno a i loro angoli retti i lati reciprocamente proporzionali; Ma sempre quando due triangoli hanno un angolo eguale ad un angolo, ed i lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali li medesimi debbono essere eguali tra di loro. Dunque non è egli da porsi in dubbio, che i due triangoli CAH BCF siano tra di loro eguali.

75. Essendo così sarà lo spazio circolare ACGH eguale al settore CGH insieme col triangolo BCF. Ma si ha il settore CGH con moltiplicare la metà dell' arco GH per la stessa perpendicolare CF, e si ha il triangolo BCF con moltiplicare la metà di BC per la stessa CF. Dunque se all' arco GH aggiungasi la BC, ch' è la larghezza dell' Unghietta, e la metà della

som-

somma moltiplichisi per CF, si avrà lo spazio circolare ACGH. Da ciò intanto egli è facile il ricavarne, che si avrà la superficie curva ABD dell' Unghietta Ellittica con moltiplicare la metà della stessa somma per la BD, ch'è la lunghezza dell' Unghietta. In fatti secondo è stato dimostrato la superficie curva ABD sta allo spazio circolare ACGH, come BD a CF. Dunque siccome la metà di quella somma moltiplicata per CF ci dà lo spazio circolare ACGH, così la metà della stessa somma moltiplicata per BD ci darà la superficie curva ABD.

76. Si vede adunque, che per potersi misurare la superficie curva ABD dell' Unghietta Ellittica, di cui si tratta, debba determinarsi primieramente la lunghezza dell' arco circolare GH, e poichè il raggio di detto arco è la CF, che è terza proporzionale dopo le due CE, CA. Perciò s' ha bisogno ancora di determinare tanto la CE, quanto la CF.

77. Attente tali cose, ecco il modo da tenersi per misurare la riferita superficie curva. Facciasi primieramente il quadrato così dell' altezza AC, come della larghezza BC, e colla radice quadrata della loro differenza, si avrà la CE.

78. Ritrovisi di poi la terza proporzionale dopo le due CE, CA, e siccome con essa avremo la CF, così colla sua determinazione verremo in cognizione, tanto della circonferenza del cerchio, che ha per raggio la stessa CE, quanto della sua quarta parte FHG.

79. Facciasi in appresso come CF a CA, così il raggio, o sia seno totale ad un quarto proporzionale. E conforme con esso avremo il seno dell' arco GH, così colla cognizione di questo suo seno, si farà a noi noto non solo il numero de' gradi, e minuti contenuti nell' arco GH, ma eziandio la sua lunghezza.

80. Aggiunganfi finalmente insieme l'arco GH, e la larghezza dell' Unghietta BC, con moltiplicare la metà della somma per la lunghezza BD della stessa Unghietta, si avrà la superficie curva ABD, che si dimanda.

81. Per schiarirlo con qualche esempio fingiamo che l' altezza AC sia di palmi 15, la larghezza BC di palmi 12, e la lunghezza BD di palmi 20. Essendo adun-

adunque 225 il quadrato di 15, e 144 il quadrato di 12; sarà 81 la differenza di detti quadrati. Ed essendo 9 la radice quadrata di questa differenza, sarà la CE di 9 palmi,

82. Or se facciasi come 9 a 15 così 15 ad un'altro numero, si ritroverà, ch'egli sia 25; Onde essendo la CF di 25 palmi, sara la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la CF di palmi 157: $\frac{4}{7}$; E pertanto la sua quarta parte FHG sarà di palmi 39 $\frac{2}{7}$.

83. Facendosi poscia come CF a CA, cioè come 25 a 15, cosi il raggio o sia seno totale 100000 ad un quarto numero, ritroveremo, che egli sia 60000, il quale rapportasi come seno ad un arco di 36 gradi, e 52 minuti; Onde di tanti gradi, e minuti sarà l' arco GH.

84. Quindi riducendo a minuti così i gradi del quadrante FHG, come i gradi dell' arco GH; sarà il quadrante FHG di 5400 minuti, e l' arco GH di minuti 2212. Onde se facciasi come 5400, 2212; così la lunghezza del quadrante FHG, che s' é ritrovata essere di palmi 39 $\frac{2}{7}$ ad un quarto numero, si avrà con questo la lunghezza dell' arco GH, che sarà in conseguenza di palmi 16 $\frac{2}{27}$.

85. Congiungasi ora insieme l' arco GH, e la larghezza dell' Unghietta BC; E sicoome la loro somma, è di palmi 28 $\frac{2}{27}$, così la mettà di questa somma sarà di palmi 14 $\frac{17}{27}$. Onde moltiplicando finalmente questa mettà per la lunghezza dell' Unghietta BD, che s' è supposta essere di 20 palmi, avremo col prodotto, la superficie curva ricercata ABD, che sara inconseguenza di 280 $\frac{20}{27}$ palmi quadrati.

86. Per darne un' altro esempio, fingiamo, che l' altezza AC dell'Unghietta sia di palmi 20, la larghezza BC di palmi 15, e la lunghezza BD di palmi 24. Essendo adunque 400 il quadrato di 20, e 225 il quadrato di 15; sarà 175 la differenza di detti quadrati, la di cui radice quadrata ritrovasi essere presso a poco 13 $\frac{22}{100}$, cioè 13' 22; con che la CE sarà di palmi 13' 22.

87. Or se facciasi come 13'22 a 20, così 20 ad un' altro numero, si ritroverà egli essere al di presso 30'

25

25. Onde essendo la CF di palmi 30' 25, sarà la circonferenza del cerchio, ch'ha per raggio la CF di palmi 190' 14, e la sua quarta parte FHG di palmi 47'53.

88. Facendosi di poi come CF a CA, cioè come 30'25 a 20, così il raggio, o sia seno totale 100000 ad un quarto numero, ritroveremo, che egli sia 66 115, il quale rapportasi, come seno ad un arco di 41 gradi, e 25 minuti; Onde di tanti gradi, e minuti sarà l'arco GH.

89. Quindi riducendo a minuti, così i gradi del quadrante FHG, come i gradi dell'arco GH; sarà il quadrante PHG di 5400 minuti, e l'arco GH di minuti 2487. Onde se facciasi come 5400 a 2485, così la lunghezza del quadrante FHG, che si è ritrovata essere di palmi 47'53, ad un quarto numero; si avrà con questo la lunghezza dell'arco GH, che sarà in conseguenza di palmi 21' 87.

90. Aggiungasi ora all' arco GH la larghezza dell' Unghietta BC; e siccome la loro somma è di palmi 36' 87 così la mettà di detta somma sarà di palmi 18' 43. Onde moltiplicando finalmente questa mettà per la lunghezna dell' Unghietta BD, che s'è supposta essere di palmi 24, si avra con questo prodotto la superficie ricercata ABD, che sarà di 442' 32 palmi quadrati.

§. VII.

Del modo di misurare le porzioni della stessa superficie curva.

91. IN una maniera consimile possano misurarsi ancora le porzioni della stessa superficie tagliate per rette parallele alla sua lunghezza, per essersi dimostrato, che siccome l'intera superficie curva ABD sta all'intero spazio circolare ACGH nella ragione di BD a CF così in questa medesima ragione sia altresì la

por-

porzione della superficie alla corrispondente porzione dello spazio circolare CNRG

92. Facciasi adunque che CP sia a CN, come CN a CF; e se nell'angolo ACB applichisi la PQ eguale alla CN, sarà altresì, come CQ a CN, così NR a CF. Onde facendosi eguali tra di loro i due triangoli CNR, QCF, la porzione dello spazio circolare CNRG sarà eguale al settore GCR insieme col triangolo QGF.

93. Or siccome il settore CGR si ha con moltiplicare la mettà dell'arco GR per la CF; così s'avrà il triangolo QCF con moltiplicare la mettà di CQ per la stessa CF. Onde se all'arco GR aggiungasi la GQ, e la mettà della somma moltiplichisi per la CF, avremo con questo prodotto la porzione dello spazio circolare CNRG; e pertanto s'avra la porzione della superficie DBMO con moltiplicare la metta della stessa somma per la BD.

94. Essendo così chiaro si è, che per potersi misurare la porzione DBMO della superficie curva debba determinarsi la lunghezaa non meno dell' arco GR, che della retta CQ. Onde dopo d' essersi determinate come sopra tanto le due CE, CF, quanto la lunghezza del quadrante FHG facciasi in appresso, come CF a CN, così il raggio, o sia seno totale ad un quarto proporzionale. E conforme con esso avremo il seno dell'arco GR, così colla conoscenza di questo suo seno sapremo altresì non solo il numero de' suoi gradi, e minuti; ma eziandio la sua larghezza.

95. Per quanto poi alla lunghezza della CQ determinasi primieramente la CP, ch'è terza proporzionale dopo le due CF, CN. Indi fatto il quadrato, così della CN, come della CP, prendasi la loro differenza, da cui cavisi la radice quadrata, ed essendo la PQ eguale alla CN, chiaro si è, che con questa radice s'avra la lunghezza della CQ. Onde con aggiungere la CQ all'arco GR, e con moltiplicare la mettà della somma per la lunghezza dell'Unghietta BD s'avra finalmente la porzione DBMO della superficie curva, che si dimanda.

96. Egli è vero, che volendosi l' intera superficie curca ABD, per cui si ha bisogno dell'arco GH, deve ag-

aggiungersi a quest' arco la larghezza dell' Unghietta BC; nientedimeno egli è da notarsi, che ciò appunto avviene, perchè siccome la terza proporzionale dopo le due CF, CA, e la CE, così la retta eguale alla CA, che dal punto E applicasi nell' angolo ACB, si termina al punto B.

97. Or per ischiarire la regola data cogl' istessi esempj rapportati di sopra, fingiamo primieramente, che l' altezza CA sia di 15 palmi, la larghezza BC di palmi 12, e la lunghezza BD di palmi 20 facendosi adunque la CE di 9 palmi ritroveremo essere, come sopra la CF di palmi 25, e la lunghezza del quadrante FHG di palmi 39 $\frac{2}{7}$, o pure di palmi 39' 28.

98. Posto poi che la CN sia di 10 palmi facciasi come CF a CN; cioè come 25 a 10, così il raggio, o sia seno totale 100000 ad un quarto numero. E siccome egli ritrovasi essere 40000, il quale rapportasi come seno ad un arco di 23 gradi, e 35 minuti, così di tanti gradi, e minuti sarà parimente l' arco GR. Or riducendo a minuti, così i gradi del quadrante FHG come i gradi dell' arco GR, sarà il quadrante FHG di 5400 minuti, e l' arco GR di 1415. Onde se facciasi come 5400. a 1415, così la lunghezza del quadrante FHG, che è di palmi 39' 28 ad un quarto numero, si avrà con esso la lunghezza dell' arco GR; che sarà inconseguenza di palmi 10' 29.

99. Essendo poi la CF di 25 palmi; e la CN di palmi 10 sarà la CP, come terza proporzionale dopo le due CF, CN di palmi 4. Onde, perchè il quadrato di CN, ovvero PQ è 100, ed il quadrato di CP è 16, sarà la loro differenza 84, la di cui radice quadrata è 9' 16, con che la CQ sarà di palmi 9' 16.

100. Essendo adunque l' arco GR di 10' 29 palmi, e la CQ di palmi 9' 16, sarà la loro somma di palmi 19' 45, e la metà di detta somma di 9' 72; Onde perchè moltiplicando questa metà per la lunghezza dell' Unghietta BD che si è supposta essere di palmi 20 si ha per prodotto 194' 4, perciò la porzione della superficie curva DBMO sarà di 194' 4 palmi quadrati.

101. Fingiamo in appresso, che l' altezza AC sia di pal-

palmi 20, la larghezza BC di palmi 15, e la lunghezza BD di palmi 24, facendosi adunque la CE di palmi 13'22, sarà la CF di palmi 30'25, e la lunghezza del quadrante FHG di palmi 47' 53.

102 Supposto poi, che la CN sia di 12 palmi, facciasi come CF a CN, cioè, come 30' 25 a 12, così il raggio, o sia seno totale 100000 ad un quarto numero, e poicchè egli ritrovasi essere 39669, che rapportasi come seno ad un'arco di 23 gradi, e 22 minuti, perciò di tanti gradi, e minuti sarà parimente l' arco GR.

103. Quindi riducendo a minuti così i gradi del quadrante FHG, come i gradi dell' arco GR, sarà il quadrante FHG di 5400 minuti, e l' arco GR di minuti 1402; Onde se facciasi come 5400 a 1402, così la lunghezza del quadrante FHG che è di palmi 47' 53 ad un quarto numero, si avrà con esso la lunghezza dell' arco GR, che sarà in conseguenza di palmi 12' 34.

104 Per essere poscia la CN di 12 palmi la CP, come terza proporzionale dopo le due CF, CN, sarà di palmi 4' 76. Onde essendo 144 il quadrato di CN, o sia PQ, e 22' 66 il quadrato di CP sarà 122' 34 la differenza di detti quadrati, e pertanto siccome la radice quadrata di questa differenza è 11' 06, così sarà CQ di 11' 06 palmi.

105. Poicchè dunque l' arco GR è di palmi 12' 34, e la CQ di palmi 11' 06, sarà la loro somma di palmi 23' 4, e la mettà di questa somma di palmi 11' 7. Onde siccome con moltiplicare questa mettà per la lunghezza dell' Unghietta BD, che si è supposta essere di 24 palmi; si hà per prodotto 280' 8, così la porzione ricercata DBMO sarà di 280' 8 palmi quadrati.

§. VIII.

§. VIII.

Di alcune Proprietà dell' Iperbole considerate tra i suoi Asintoti.

106. PRima di passare alla superficie curva dell' Unghietta Ellittica della seconda specie, giova premettere alcune proprietà dell' Iperbole considerata trà i suoi Asintoti; Ed in primo luogo se CA, CB siano gl' Asintoti dell' Iperbole DM, e sopra uno di essi si abbassi da un punto qualsivoglia M della stessa Iperbole la retta MN parallela all' altro Asintoto AC, di già si sa, che il rettangolo delle due AN, MN rimane sempre lo stesso ovunque prendasi nell' Iperbole il punto M.

Fig. 6.

107. Se adunque CD sia la mettà dell'asse principale dell' Iperbole dal suo vertice D si abbassi su lo stesso Asintoto CA la retta DE parallela parimente all' altro Asintoto CB; saranno eguali trà di loro i due rettangoli CNM, CED, E pertanto CN sarà a CE, come DE ad MN.

108. Ma da ciò siccome nè segue, che siano eguali trà di essi i due triangoli MCN, DCE per la ragione, che intorno ad angoli eguali ritrovansi avere lati reciprocamente proporzionali, così da questa eguaglianza egli è facile ancora il dedurne, che il settore Iperbolico CDM sia eguale al corrispondente quadrilatero Iperbolico DMNE.

109. Fingiamo ora che l' Iperbole DM sia equilatera di modochè l' angolo ACB contenuto dai due Asintoti CA, CB sia retto; E poicchè in questa supposizione le rette DE, MN insistono ad angoli retti sull' Asintoto CA, e ciascuno dei due angoli ACD, BCD si fa eguale alla mettà di un retto, chiaro si è che le due CE, DE saranno trà di loro eguali; E pertanto il rettangolo CED non sarà differente dal quadrato fatto da uno di esse.

110.

110. Quindi ſiccome nell' Iperbole Equilatera ogn' altro rettangolo CNM ſi fa eguale al quadrato di CE, o vero DE così queſto quadrato ſuol riguardarſi come la potenza dell' iſteſſa Iperbole; egli è facile ad intenderſi, che la riferita potenza ſia eguale alla metà del quadrato fatto dal ſemiaſſe CD.

111. Se ſull' Aſintoto CA dell' Iperbole equilatera prendaſi sù la CQ, che ſia terza proporzionale dopo le due CE, CN, e facciaſi la PQ parallela all'altro Aſintoto CB; egli è facile il dimoſtrare, che li due ſpazj Iperbolici DMNE, MPQN ſiano eguali tra eſſo loro.

112. Fingiamo perciò, che EF, NO ſieno due porzioni infinitamente picciole d'indole tale, che CE ſia a CF, come CN a CO, e per li punti F ed O intendaſi tirate le rette FG, OR parallele eziandio all'altro Aſintoto CB, in guiſa, che i due piccioli trapezj DEFG, MNOR poſſono eſſere riguardati, come due piccioli rettangoli.

113. Poichè dunque per coſtruzione CE ſtà a CF, come CN a CO, togliendo gl' antecedenti dai conſeguenti ſarà come CE ad EF, così CN ad NO, ed inconſeguenza permutando ſarà parimente CE a CN, come EF ad NO.

114. Conforme poi per ragion dell' Iperbole ſono eguali tra loro i due rettangoli CED, CNM, così attenta queſt' eguaglianza CE ſtà a CN, come MN a DE: dunque ſarà ancora come MN a DE, così EF ad NO; e pertanto facendoſi eguali tra loro i due piccioli rettangoli DEF, MNO ſaranno eguali altresì i due piccioli trapezj DEFG, MNOR.

115. Or prendendo conſecutivamente altre porzioni infinitamente picciole, che ſiano della ſteſſa indole colle due prime EF, NO ſi dimoſtrerà in una maniera conſimile, che ſiano eguali tra loro i due piccioli trapezj Iperbolici corriſpondenti a queſt'altre porzioni.

116. E poichè per ſuppoſizione CE ſtà a CN, come CN a CQ ſi termineranno queſt'altre porzioni a'i punti N, Q; dimodocchè eſſendo quei piccioli trapezj elementi di due ſpazj Iperbolici DMNE, MPQN. Chiaro ſi è, che ancora queſti ſpazj Iperbolici debbano eſſere tra loro eguali.

117. Attenta questa proprietà vedesi chiaramente, che se sull'Asintoto CA prendansi non solo le tre porzioni CE, CN, CQ, ma eziandio altre infinite, che formino insieme una progressione Geometrica, debbano essere eguali tra loro li spazj Iperbolici corrispondenti alle differenze di dette porzioni.

118. Quindi siccome colla continua unione di detti spazj incominciano tutti dalla DE, e formano insieme una progressione Arimmetica, a cui può darsi per primo termine la stessa DE, o sia uno spazio Iperbolico infinitamente picciolo, così quest' altri spazj potranno aversi come logaritmi delle porzioni prese sull' Asintoto CA, che formano al contrario una progressione Geometrica.

119. Della CE adunque, il di cui quadrato ci dà la potenza dell'Iperbole, logaritmo sarà la DE, o più tosto un spazio Iperbolico così infinitamente picciolo, che non sia diverso dal zero; All' incontro poi dell'altre CN, CQ logaritmi saranno li spazj Iperbolici finiti DMNE, DPQE, che incominciano dalla DE, e terminansi all' ordinate MN, PQ corrispondenti a dette porzioni.

120. Or siccome qualunque sia il sistema de'logaritmi, di cui voglia farsi uso per li numeri, giova sempre prendere il zero per logaritmo dell' unità, così se vogliamo, che i riferiti spazj Iperbolici siano i logaritmi de' numeri, dovrà disegnarsi l' unità per mezzo della CE, che è il lato della potenza dell' Iperbole, perchè in questa guisa si ritroverà ella avere il zero per suo logaritmo.

121. Conforme poi i numeri maggiori dell' unità debbano disegnarsi per porzioni maggiori della CE, come sono CN, CQ, così al contrario i numeri minori dell' unità dovranno essere disegnati per porzioni minori della CE, come sono C *n*, C *q*, e poichè i logaritmi di quest'altre porzioni sono li spazj D *mn*E, D*pq*E, i quali ritrovansi situati dall' altro lato. Quindi si è, che i logaritmi de' numeri minori dell' unità eziandio in questo sistema saranno negativi.

122. Di questi logaritmi Iperbolici in tanto basta determinarne uno solo, poichè per mezzo delle ta-

vole de' logaritmi ordinarj, che già abbiamo, egli è facile da quello dedurne tutti gl' altri; E ciò per la ragione, che i logaritmi di dati numeri presi in un sistema debbano essere proporzionali ai logaritmi delli stessi numeri presi in qualsisia altro sistema.

123. Perciò supposto, che la porzione CN sia dupla della CE, ed inconseguenza, che disegni il numero 2; si è procurato da Geometri di determinare presso a poco il valore dello spazio Iperbolico DMNE corrispondente a detta porzione; E siccome anno ritrovato, che la potenza dell'Iperbole sia a detto spazio, come 1 a o' 6931472, così il logaritmo Iperbolico del numero 2 sarà o' 6931472.

124. Quindi volendosi il logaritmo Iperbolico d'ogn' altro numero, come di 10, non dovrà farsi altra cosa, se non che prendere nelle tavole de' logaritmi ordinarj, così quello di 2, ch' è o' 3010300, come l' altro di 10, ch'e 1'0000000, ed indi direste o' 3010300 da 1' 0000000, che darà o' 6931472, ed in questa maniera ritroveremo, che il logaritmo Iperbolico del numero 10 debba essere 2' 3025851.

125. Determinato intanto il logaritmo Iperbolico del numero 10 potrà aversi colla sola moltiplicazione il logaritmo consimile di ogn' altro numero, cioè con moltiplicare il logaritmo ordinario del numero proposto per 2'3025851, che è il logaritmo del numero 10, e con prendere del prodotto le prime otto note.

126. In fatti se il numero proposto sia 15 il suo logaritmo ordinario sarà 1' 1760913, il quale moltiplicato per 2' 3025851 da per prodotto 27090497036 1363; Onde prendendo di questo prodotto le prime otto note sara 2'7090497 il logaritmo Iperbolico di 15.

127. Or siccome niente è egli più facile quanto di determinare il logaritmo Iperbolico di qualsisia numero dato; così dovendosi definire lo spazio Iperbolico, che incomincia dalla DE, e si termina a qualsivoglia ordinata MN, non dovrà farsi altra cosa, che ritrovare il logaritmo Iperbolico della CN; Poicchè lo spazio ricercato DMNE sarà alla potenza dell' Iperbole, cioè al quadrato della CE, come stà il riferito logaritmo Iperbolico all'unità. Ed essendo così chiaro si è,

che si avrà lo spazio Iperbolico DMNE, o pure il settore eguale CDM, con moltiplicare la potenza dell' Iperbole, o sia il quadrato della CE per lo logaritmo della CN. E poicchè il quadrato della CE e eguale alla metta del quadrato del semiasse principale CD; Perciò si avrà ancora lo spazio Iperbolico DMNE, o pure il settore CDN con moltiplicare la metta del quadrato di CD per lo logaritmo Iperbolico della CN.

128. Del rimanente siccome ogni numero è esponente della ragione, che egli stesso serba coll' unità; così giova quì notare, che tanto i logaritmi ordinarj, quanto i logaritmi Iperbolici si rapportano propriamente non già a i numeri, di cui diconsi essere logaritmi, ma alli esponenti delle ragioni, che quei numeri serbono coll' unità.

129. Quindi siccome nell' Iperbole equilatera l' unità vien disegnata per la CE, che è il lato della potenza dell' istessa Iperbole, così il logaritmo tanto ordinario, quanto Iperbolico d' ogn' altro numero disegnato per la CN si rapporterà propriamente all' esponente della ragione; che serbano tra di loro le due CN, CE.

130. Dalche egli è facile il ricavarne, che se CF *Fig.7.* sia l' asse secondo dell' Iperbole equilatera, su di cui si abbassi dal punto M la perpendicolare MR, il logaritmo, così ordinario, come Iperbolico del numero disegnato per la CN, si rapporti altresì all' esponente della ragione, che la somma delle due CR, DR serba con la DC.

131. In fatti essendo eguale a i quadrati delle due CR, CD, così il quadrato della MR, come il quadrato della DR, sarà la MR alla DR così CD a CR; Ma prolungata la MN per fino a che s' incontri colla CF nel punto S, si fanno eguali le due MR, RS: dunque essendo la RS eziandio eguali alla DR, sarà la tutta CS eguale alla somma delle due CR, DR; E pertanto la CS sarà alla CD, come la somma delle due CR, DR alla stessa CD.

132. Per esser poscia equiangoli i due triangoli CSN CDE, chiaro si è, che CS sia a CD, come CN a CE. Onde sarà ancora, come CN a CE così la somma delle due CR, DR alla CD, ed in conseguenza il loga-

garitmo così ordinario, come Iperbolico del numero disegnato per la CN si rapporterà propriamente tanto all'esponente della ragione, che la somma delle due CR, DR serba colla CD.

133. Essendo così si determinerà il valare di un settore Iperbolico, come CDM, se abbassata sull'asse secondo CF la perpendicolare MR, e ritrovato il logaritmo Iperbolico dell'esponente della ragione, che la somma delle due CR, DR serba colla CD, moltiplichisi questo logaritmo per la mettà del quadrato della CD, cioè primieramente per tutta la CD, ed indi per la sua mettà.

§. IX.

Della superficie curva dell'Unghiette Elittiche della seconda specie.

134. Dopo essersi fatto vedere come possa determinarsi qualsisia settore preso in un Iperbole equilatera, passeremo ora a considerare la superficie curva dell'Unghietta Ellittica della seconda specie, la di cui determinazione secondo si disse di sopra dipende dalla quadratura dell'Iperbole.

135. Sia perciò ABCD l'Unghietta Ellittica della seconda specie, dimodocchè l'altezza di essa AC sia minore della sua larghezza BC; e supposto che il punto E sia il foco del quadrante Ellittico ABC, prolunghisi la BC talmente per sino al punto F, che CE sia a CA, come CA a CF, il che potrà farsi con alzare sulla AE la perpendicolare AC, che s'incontri colla BC prolungata nel punto F. *Fig.* 8.

136. Descrivasi poscia l'Iperbole equilatera FH, la quale abbia per suo centro il punto C per suo vertice principale il punto F, ed inconseguenza per mettà del suo primo asse la CF, ed inconseguenza tirata la AH parallela alla CF, che s'incontri con detta Iperbole nel punto H, la superficie curva dell'Unghietta ABD sia alle

spa-

spazio Iperbolico ACFH, come la lunghezza BD dell' istessa Unghietta al semiasse dell' Iperbole.

137. Per dimostrarlo sia M*m* un' archetto infinitamente picciolo del quadrante Ellittico, e tirinsi, così nello stesso quadrante le rette MN, *mn* parallele alla BC, come nella superficie curva dell' Unghietta le rette MO, *mo* parallele alla BD. I due piccioli trapezj OM*mo*, NM*mn* potranno riguardarsi, come due piccioli rettangoli; E perciò i medesimi saranno tra esso loro in ragion composta di MO ad MN, e di M*m* ad N*n*.

138. Or siccome l' archetto M*m* può aversi come porzione della retta MT, che tocca il quadrante Ellittico nel punto M, così se MS sia perpendicolare su di questa tangente, chiaro si è, che M*m* sia ad N*n*, come MS ad MN; ma per essere equiangoli i due triangoli MNO, CBD, MO sia ad MN, come BD a DC. Dunque i due piccioli trapezj OM*mo*, NM*mn* saranno tra di loro in ragione composta di BD a BC e di MS ad MN.

139. Prolunghisi poscia le due MN, *mn* per fino a che si vadano ad incontrare coll' Iperbole equilatera ne' punti R, ed *r*, e poichè ancora i due piccioli trapezj NM*mn*, RN*nr* possono riguardarsi come due piccioli rettangoli dotati d'una stessa altezza, perciò i medesimi saranno tra di loro nella semplice ragione delle loro basi MN, NR, o pure in ragion composta di BD a BC, e di MN ad NR. Onde ordinando sarà il picciolo trapezio OM*mo* al picciolo trapezio NR*nr* in ragion composta di BD a BC, e di MS ad NR.

140. Conforme poi il quadrato di MS è eguale al rettangolo fatto dalla retta TS in SN; così attento la proprietà della tangente MT, e della perpendicolare MS, ritroveremo, che MS sia ad NR, come BC a CF. Onde i due piccioli trapezj OM*mo*, RN*nr* saranno altresì in ragion composta di BD a BC, e di BC a CF, o pure nella semplice ragione di BD a CF.

141. Questa dimostrazione intanto ha luogo ovunque prendansi i due piccioli trapezj OM*mo*, RN*nr*; Onde siccome tutti gl' infiniti piccioli trapezj OM*mo* son

no elementi della superficie curva ABD, e tutti gl' altri infiniti trapezj NR*nr* sono elemento dello spazio Iperbolico ACFH. Così ancora quella superficie curva sarà a questo spazio Iperbolico come BD a CF.

142. Anzi in virtù della stessa dimostrazione, chiaro si è, che nella medesima ragione di BD a CF debba essere parimente tanto la porzione della superficie AMO alla porzione corrispondente dello spazio ANRH, quanto la rimanente porzione della superficie BDOM alla rimanente porzione dello spazio CFRN.

143. Del rimanente ancora da quest' altro Teorema, che ha luogo nell' *U*nghiette Ellittiche della seconda specie possiamo dedurne che essendo l'Unghietta di sua natura circolare, la sua superficie curva ABD debba essere eguale al duplo della sua base BCD; ed in conseguenza al rettangolo dell' altezza AC nella lunghezza BD.

144. In fatti affinchè l'Unghietta facciasi circolare il foco E deve riunirsi col centro C. Ma in questa supposizione siccome si fa la CE infinitamente picciola, e la CF infinitamente lunga, così l' arco Iperbolico FH non sarà diverso da una retta eguale, e parallela alla AC. Onde facendosi lo spazio Iperbolico eguale al rettangolo di AC in CF, sarà la superficie curva ABD dell'Unghietta eguale al rettangolo di AC in BD.

§. X.

Del modo di misurare la superficie curva di quest' altre Unghiette.

145. PEr intendere ora il modo di misurare la superficie curva ABD di una Unghietta Ellittica della seconda specie, giova prima riflettere, che siccome per costruzione CE stà a CA, come CA a CF; così da ciò ne siegue, che CB sia a CA, come AH a CF.

146. Imperocchè essendo CE a CA, come CA a CF sarà ancora come il quadrato di CE al quadrato di CA, così il quadrato di CA al quadrato di CF; e pertanto se agl'antecedenti aggiungansi i loro conseguenti, sarà altresì come la somma de' due quadrati CE, CA al solo quadrato di CA, così la somma dei due quadrati CA, CF al solo quadrato di CF.

147. Or siccome per lo triangolo ACE rettangolo in C, la somma dei due quadrati CE, CA è eguale al quadrato di AE, o pure di CB, così attenta l' indole dell' Iperbole equilatera la somma degl' altri due quadrati CA, CF sarà eguale al quadrato di AH. Onde essendo il quadrato di CB al quadrato di CA come il quadrato di AH al quadrato di CF, sarà ancora come CB a CA, così AH a CF.

148. Essendo adunque proporzionali le quattro rette BC, CA, AH CE, chiaro si è, che si avrà il triangolo non solo col moltiplicare la CA per la mettà di AH ma eziandio con moltiplicare la CF per la mettà di AB, e ciò per la ragione, che essendo quattro rette proporzionali il rettangolo delle due estreme, si fa eguale al rettangolo delle due di mezzo.

140. Quindi attenta la maniera di determinare il settore Iperbolico CFH, chiara cosa ancore si è, che si avrà l'intero spazio Iperbolico ACFH primieramente con ritrovare l' esponente della ragione, che la somma delle due CA, AF serba colla CF; Indi con moltiplicare il logaritmo Iperbolico di questo esponente per la CF, in appresso con aggiungere al prodotto la CB; e finalmente con moltiplicare la mettà della somma per la stessa CF. Essendosi poscia dimostrato, che la superficie curva dell' Unghietta ABD sia allo spazio Iperbolico ACFH, come BD a CF; vedesi altresì, che si avrà la riferita superficie curva, con moltiplicare la mettà della stessa somma per la BD. Onde ecco quel tanto deve farsi per avere la misura di detta superficie curva.

150. Facciasi primieramente il quadrato, così dell' altezza CA, come della larghezza CB; E conforme colla radice quadrata della loro differenza si avrà la CE, così col ritrovare la terza proporzionale dopo le due CE, CA avremo la CF. 151.

151. Facciansi in appresso i quadrati delle due CA, CF, e siccome colla radice quadrata della loro somma si avrà la AF, così dividendo poscia la somma delle due CA, AF per la CF, avremo l' esponente della ragione, che la stessa somma delle due CA, AF serba colla CF.

152. Ritrovasi di poi il logaritmo Iperbolico di questo esponente, e dal prodotto di esso per la CF aggiungasi la CB moltiplichisi finalmente la metà di questa somma per la lunghezza dell'Unghietta BD, e con questo prodotto avremo la superficie curva ABD, che si dimanda.

153. Per schiarirlo con qualche esempio, sia l' altezza CA di palmi 12, la larghezza CB di palmi 20, e la lunghezza BD di palmi 30. Essendo adunque 144 il quadrato di CA; e 400 è il quadrato di CB, sarà 256 la differenza di questi due quadrati, ed essendo 16 la radice quadrata di questa differenza, sarà la CE di 16 palmi; Onde la CF come terza proporzionale dopo le due CF, CA sarà di palmi 9.

154. Inoltre essendo 144 il quadrato di CA, ed 81 il quadrato di CF; sarà 225 la somma di questi due quadrati la di lui radice quadrata ci fa conoscere, che la AF sia di palmi 15; Quindi essendo 27 la somma delle due CA, AF, sarà 3 il quoziente, che si ha con dividere questa somma per la CF; E pertanto lo stesso numero 3 sarà l'esponente della ragione, che la somma delle due CA, AF serba con la CF.

155. Or avvalendoci delle sole prime quattro note tanto de' logaritmi ordinarj quanto de' logaritmi Iperbolici, siccome il logaritmo ordinario di 3 è 0'477, così il suo logaritmo Iperbolico sarà 1'098; Onde moltiplicando questo logaritmo per la CF di palmi 9; ed aggiungendo al prodotto la CB di palmi 20, sarà la metà della somma di palmi 14'941.

156. Moltiplichisi finalmente la riferita metà per la lunghezza dell' Unghietta BD, che si è supposta essere di palmi 30, e siccome il prodotto nato da questa moltiplicazione si è 448'23, così ancora la superficie curva ABD, che si domanda sarà di 448'23 palmi quadrati.

§. XI.

Del modo di misurare le porzioni dell' istessa superficie curva.

157. IN una maniera consimile potrà misurarsi altresì la porzione BDOM dell' istessa superficie riseeata per la MO parallela alla BD; tagliasi perció dalla CB la porzione CP di lunghezza tale, che CP sia a CN, come CN a CF; e facendosi proporzionali le quattro rette NP, CN, NR, CF, si avrà il triangolo CNR non solo con moltiplicare la CN per la mettà di NR, ma eziandio con moltiplicare la CF per la mettà di NP.

158. Quindi attenta la maniera di determinare il settore Iperbolico CFR si avrà l' intero spazio Iperbolico CNRF, primieramente con determinare l' esponente della ragione, che la somma delle due CN, NF serba colla CF, indi con moltiplicare il logaritmo Iperbolico di questo esponente per la CF; in appresso con aggiungere al prodotto nato da questa moltiplicazione la NP, e finalmente con moltiplicare la mettà della somma per la stessa CF.

159. E poichè si è dimostrato, che la porzione DBMO della superficie curva dell' Unghietta sia alla corrispondente porzione CNRF dello spazio Iperbolico eziandio nella ragione di BD a CF; chiaro si è, che si avrà la porzione DBMO della riferita superficie curva con moltiplicare la mettà della stessa somma per la BD, ch' è la lunghezza dell' Unghietta.

160. Per la misura adunque della porzione sudetta dopo esser determinate le due CE, CF deve determinarsi in appresso la NF, per potersi avere l' esponente della ragione, che la somma delle CN, NF serba colla CF, la quale NF si determinerà con fare i quadrati delle due CN, CF, e con estrarre la radice quadrata dalla loro somma.

161. Deve determinarsi poscia la NP, la quale si de-

determinerà primieramente con definire la lunghezza della CP, che si è fatta terza proporzionale dopo le due CF, CN, indi con fare i quadrati delle due CN, CP; ed in fine con estrarre dalla loro somma la radice quadrata.

162. Determinate tali cose cercasi il logaritmo Iperbolico dell'esponente della ragione, che la somma delle due CN, NF serba con la CF, moltiplichisi di poi questo logaritmo per la CF, e dal prodotto aggiungasi la NP, moltiplichisi finalmente la mettá della somma per la lunghezza dell' Unghietta BD, e con quest' altro prodotto si avrà la porzione ricercata DBMO.

FINE DELLA MISURA DELLE VOLTE.

IN-



INDICE
DELLA MISULA DELLE VOLTE.

Fig.a 6:

Fig.a 5:

